2026

CANPOINT®

高考总复习单元测评卷

命 题 新 趋 势　高 考 新 题 型

真题分类精练

ZHENTIFENLEIJINGLIAN

主编：肖德好

数学

Mathematics

开明出版社

CONTENTS 目录

考点1　集合

1. [2024·天津卷] 集合 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,3,4,5\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{2,4\}$　　D. $\{1\}$

2. [2025·北京卷] 集合 $M=\{x\mid 2x-1>5\}$，$N=\{1,2,3\}$，则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{3\}$　　D. $\varnothing$

3. [2025·全国二卷] 已知集合 $A=\{-4,0,1,2,8\}$，$B=\{x\mid x^3=x\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{0,1,2\}$　　B. $\{1,2,8\}$

C. $\{2,8\}$　　D. $\{0,1\}$

4. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知集合 $A=\{x\mid -5<x^3<5\}$，$B=\{-3,-1,0,2,3\}$，则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{-1,0\}$　　B. $\{2,3\}$

C. $\{-3,-1,0\}$　　D. $\{-1,0,2\}$

5. [2023·新课标Ⅰ卷] 已知集合 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$，$N=\{x\mid x^2-x-6\geqslant 0\}$，则 $M\cap N=$ (　　)

A. $\{-2,-1,0,1\}$　　B. $\{0,1,2\}$

C. $\{-2\}$　　D. $\{2\}$

6. [2025·全国一卷] 已知集合 $U=\{x\mid x$ 是小于 9 的正整数$\}$，$A=\{1,3,5\}$，则 $\complement_U A$ 中元素个数为 (　　)

A. 2　　B. 3

C. 5　　D. 8

7. [2022·全国乙卷] 设全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，集合 M 满足 $\complement_U M=\{1,3\}$，则 (　　)

A. $2\in M$　　B. $3\in M$

C. $4\notin M$　　D. $5\notin M$

8. [2025·天津卷] 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,3\}$，$B=\{2,3,5\}$，则 $\complement_U(A\cup B)=$ (　　)

A. $\{1,2,3,4\}$　　B. $\{2,3,4\}$

C. $\{2,4\}$　　D. $\{4\}$

9. [2023·全国乙卷] 设集合 $U=\mathbf{R}$，集合 $M=\{x\mid x<1\}$，$N=\{x\mid -1<x<2\}$，则 $\{x\mid x\geqslant 2\}=$ (　　)

A. $\complement_U(M\cup N)$　　B. $N\cup(\complement_U M)$

C. $\complement_U(M\cap N)$　　D. $M\cup(\complement_U N)$

10. [2023·全国甲卷] 设全集 $U=\mathbf{Z}$，集合 $M=\{x\mid x=3k+1,k\in\mathbf{Z}\}$，$N=\{x\mid x=3k+2,k\in\mathbf{Z}\}$，则 $\complement_U(M\cup N)=$ (　　)

A. $\{x\mid x=3k,k\in\mathbf{Z}\}$

B. $\{x\mid x=3k-1,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{x\mid x=3k-2,k\in\mathbf{Z}\}$

D. $\varnothing$

11. [2020·全国卷Ⅲ] 已知集合 $A=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbf{N}^*,y\geqslant x\}$，$B=\{(x,y)\mid x+y=8\}$，则 $A\cap B$ 中元素的个数为 (　　)

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 6

12. [2023·新课标Ⅱ卷] 设集合 $A=\{0,-a\}$，$B=\{1,a-2,2a-2\}$，若 $A\subseteq B$，则 $a=$ (　　)

A. 2　　B. 1

C. $\dfrac{2}{3}$　　D. -1

13. [2020·全国新高考Ⅰ卷] 某中学的学生积极参加体育锻炼，其中有 96% 的学生喜欢足球或游泳，60% 的学生喜欢足球，82% 的学生喜欢游泳，则该中学既喜欢足球又喜欢游泳的学生数占该校学生总数的比例是 (　　)

A. 62%　　B. 56%

C. 46%　　D. 42%

14. [2020·浙江卷] 设集合 S,T，$S\subseteq\mathbf{N}^*$，$T\subseteq\mathbf{N}^*$，S,T 中至少有 2 个元素，且 S,T 满足：

①对于任意的 $x,y\in S$，若 $x\neq y$，则 $xy\in T$；

②对于任意的 $x,y\in T$，若 $x<y$，则 $\dfrac{y}{x}\in S$. 下列命题正确的是 (　　)

A. 若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 7 个元素

B. 若 S 有 4 个元素，则 $S\cup T$ 有 6 个元素

C. 若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 5 个元素

D. 若 S 有 3 个元素，则 $S\cup T$ 有 4 个元素

考点2　常用逻辑用语

1. [2015·全国卷Ⅰ] 设命题 p：$\exists n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$，则 $\neg p$ 为　（　）

A. $\forall n\in\mathbf{N}, n^2>2^n$

B. $\exists n\in\mathbf{N}, n^2\leqslant 2^n$

C. $\forall n\in\mathbf{N}, n^2\leqslant 2^n$

D. $\exists n\in\mathbf{N}, n^2=2^n$

2. [2024·天津卷] 设 $a,b\in\mathbf{R}$，则"$a^3=b^3$"是"$3^a=3^b$"的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. [2024·新课标Ⅱ卷] 已知命题 p：$\forall x\in\mathbf{R}$，$|x+1|>1$，命题 q：$\exists x>0$，$x^3=x$，则　（　）

A. p 和 q 都是真命题

B. $\neg p$ 和 q 都是真命题

C. p 和 $\neg q$ 都是真命题

D. $\neg p$ 和 $\neg q$ 都是真命题

4. [2024·北京卷] 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是向量，则"$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=0$"是"$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{b}$"的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. [2025·天津卷] 设 $x\in\mathbf{R}$，则"$x=0$"是"$\sin 2x=0$"的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. [2020·浙江卷] 已知空间中不过同一点的三条直线 l,m,n，"l,m,n 共面"是"l,m,n 两两相交"的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. [2023·全国甲卷] 设甲：$\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$，乙：$\sin\alpha+\cos\beta=0$，则　（　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

8. [2021·北京卷] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则"$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上单调递增"是"$f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上的最大值为 $f(1)$"的　（　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

9. [2019·浙江卷] 设 $a>0,b>0$，则"$a+b\leqslant 4$"是"$ab\leqslant 4$"的　（　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

10. [2023·新课标Ⅰ卷] 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，设甲：$\{a_n\}$ 为等差数列；乙：$\left\{\dfrac{S_n}{n}\right\}$ 为等差数列，则　（　）

A. 甲是乙的充分条件但不是必要条件

B. 甲是乙的必要条件但不是充分条件

C. 甲是乙的充要条件

D. 甲既不是乙的充分条件也不是乙的必要条件

11. [2020·北京卷] 已知 $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$，则"存在 $k\in\mathbf{Z}$ 使得 $\alpha=k\pi+(-1)^k\beta$"是"$\sin\alpha=\sin\beta$"的　（　）

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

考点3　不等式

1. [2020·全国卷Ⅰ] 已知集合 $A=\{x|x^2-3x-4<0\}$, $B=\{-4,1,3,5\}$, 则 $A\cap B=$ (　　)

A. $\{-4,1\}$　　B. $\{1,5\}$

C. $\{3,5\}$　　D. $\{1,3\}$

2. [2025·全国二卷] 不等式 $\dfrac{x-4}{x-1}\geqslant 2$ 的解集是 (　　)

A. $\{x|-2\leqslant x\leqslant 1\}$

B. $\{x|x\leqslant -2\}$

C. $\{x|-2\leqslant x<1\}$

D. $\{x|x>1\}$

3. [2022·上海卷] 若实数 a,b 满足 $a>b>0$, 则下列不等式中恒成立的是 (　　)

A. $a+b>2\sqrt{ab}$

B. $a+b<2\sqrt{ab}$

C. $\dfrac{a}{2}+2b>2\sqrt{ab}$

D. $\dfrac{a}{2}+2b<2\sqrt{ab}$

4. [2023·北京卷] 若 $xy\neq 0$, 则"$x+y=0$"是"$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}=-2$"的 (　　)

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

5. [2025·北京卷] 已知 $a>0,b>0$, 则 (　　)

A. $a^2+b^2>2ab$

B. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\geqslant\dfrac{1}{ab}$

C. $a+b>\sqrt{ab}$

D. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leqslant\dfrac{2}{\sqrt{ab}}$

6. [2021·全国乙卷] 下列函数中最小值为 4 的是 (　　)

A. $y=x^2+2x+4$

B. $y=|\sin x|+\dfrac{4}{|\sin x|}$

C. $y=2^x+2^{2-x}$

D. $y=\ln x+\dfrac{4}{\ln x}$

7. (多选题)[2020·全国新高考Ⅰ卷] 已知 $a>0$, $b>0$, 且 $a+b=1$, 则 (　　)

A. $a^2+b^2\geqslant\dfrac{1}{2}$

B. $2^{a-b}>\dfrac{1}{2}$

C. $\log_2 a+\log_2 b\geqslant -2$

D. $\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2}$

8. (多选题)[2022·新高考全国Ⅱ卷] 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-xy=1$, 则 (　　)

A. $x+y<1$　　B. $x+y\geqslant -2$

C. $x^2+y^2\geqslant 1$　　D. $x^2+y^2\leqslant 2$

9. [2023·上海卷] 不等式 $|x-2|<1$ 的解集为________.

10. [2017·北京卷] 能够说明"设 a,b,c 是任意实数. 若 $a>b>c$, 则 $a+b>c$"是假命题的一组整数 a,b,c 的值依次为____________.

11. [2025·上海卷] 设 $a,b>0$, $a+\dfrac{1}{b}=1$, 则 $b+\dfrac{1}{a}$ 的最小值为________.

12. [2020·江苏卷] 已知 $5x^2y^2+y^4=1$ $(x,y\in\mathbf{R})$, 则 x^2+y^2 的最小值是________.

13. [2025·天津卷] 若 $a,b\in\mathbf{R}$, 对任意 $x\in[-2,2]$, 均有 $(2a+b)x^2+bx-a-1\leqslant 0$ 成立, 则 $2a+b$ 的最小值为________.

考点4　函数的概念及其表示

1. ［2016·全国卷Ⅱ］下列函数中，其定义域和值域分别与函数 $y=10^{\lg x}$ 的定义域和值域相同的是（　　）

A. $y=x$　　B. $y=\lg x$

C. $y=2^x$　　D. $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

2. ［2015·湖北卷］设 $x\in\mathbf{R}$，定义符号函数 $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1,x>0,\\0,x=0,\\-1,x<0,\end{cases}$ 则（　　）

A. $|x|=x|\operatorname{sgn} x|$

B. $|x|=x\operatorname{sgn}|x|$

C. $|x|=|x|\operatorname{sgn} x$

D. $|x|=x\operatorname{sgn} x$

3. ［2017·山东卷］设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x},0<x<1,\\2(x-1),x\geqslant1.\end{cases}$ 若 $f(a)=f(a+1)$，则 $f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$（　　）

A. 2　　B. 4

C. 6　　D. 8

4. ［2018·全国卷Ⅰ］设函数 $f(x)=\begin{cases}2^{-x},x\leqslant0,\\1,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x+1)<f(2x)$ 的 x 的取值范围是（　　）

A. $(-\infty,-1]$

B. $(0,+\infty)$

C. $(-1,0)$

D. $(-\infty,0)$

5. ［2025·北京卷］已知函数 $f(x)$ 的定义域为 D，则"函数 $f(x)$ 的值域为 $\mathbf{R}$"是"对任意 $M\in\mathbf{R}$，存在 $x_0\in D$，使得 $|f(x_0)|>M$"的（　　）

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充分必要条件

D. 既不充分也不必要条件

6. ［2015·浙江卷］存在函数 $f(x)$ 满足：对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有（　　）

A. $f(\sin 2x)=\sin x$

B. $f(\sin 2x)=x^2+x$

C. $f(x^2+1)=|x+1|$

D. $f(x^2+2x)=|x+1|$

7. ［2024·新课标Ⅰ卷］已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(x)>f(x-1)+f(x-2)$，且当 $x<3$ 时，$f(x)=x$，则下列结论中一定正确的是（　　）

A. $f(10)>100$

B. $f(20)>1000$

C. $f(10)<1000$

D. $f(20)<10\,000$

8. ［2022·北京卷］函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x}$ 的定义域是________.

9. ［2023·上海卷］已知 $f(x)=\begin{cases}2^x,x>0,\\1,x\leqslant0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的值域是________.

10. ［2021·浙江卷］已知 $a\in\mathbf{R}$，函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-4,x>2,\\|x-3|+a,x\leqslant2.\end{cases}$ 若 $f(f(\sqrt{6}))=3$，则 $a=$________.

11. ［2022·浙江卷］已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2+2,x\leqslant1,\\x+\dfrac{1}{x}-1,x>1,\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=$________；若当 $x\in[a,b]$ 时，$1\leqslant f(x)\leqslant3$，则 $b-a$ 的最大值是________.

12. ［2017·全国卷Ⅲ］设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1,x\leqslant0,\\2^x,x>0,\end{cases}$ 则满足 $f(x)+f\left(x-\dfrac{1}{2}\right)>1$ 的 x 的取值范围是________.

考点5　函数的基本性质

考向1　函数单调性、奇偶性、周期性的简单应用

1. [2017・全国卷Ⅱ] 函数 $f(x)=\ln(x^2-2x-8)$的单调递增区间是 (　　)

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,1)$

C. $(1,+\infty)$　　D. $(4,+\infty)$

2. [2024・天津卷] 下列函数是偶函数的是 (　　)

A. $y=\dfrac{e^x-x^2}{x^2+1}$　　B. $y=\dfrac{\cos x+x^2}{x^2+1}$

C. $y=\dfrac{e^x-x}{x+1}$　　D. $y=\dfrac{\sin x+4x}{e^{|x|}}$

3. [2022・北京卷] 已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+2^x}$，则对任意实数 x，有 (　　)

A. $f(-x)+f(x)=0$

B. $f(-x)-f(x)=0$

C. $f(-x)+f(x)=1$

D. $f(-x)-f(x)=\dfrac{1}{3}$

4. [2021・全国乙卷] 设函数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，则下列函数中为奇函数的是 (　　)

A. $f(x-1)-1$　　B. $f(x-1)+1$

C. $f(x+1)-1$　　D. $f(x+1)+1$

5. [2023・全国乙卷] 已知 $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^{ax}-1}$是偶函数，则 $a=$ (　　)

A. -2　　B. -1

C. 1　　D. 2

6. [2023・北京卷] 下列函数中，在区间$(0,+\infty)$上单调递增的是 (　　)

A. $f(x)=-\ln x$

B. $f(x)=\dfrac{1}{2^x}$

C. $f(x)=-\dfrac{1}{x}$

D. $f(x)=3^{|x-1|}$

7. [2023・新课标Ⅰ卷] 设函数 $f(x)=2^{x(x-a)}$在区间$(0,1)$单调递减，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-2]$　　B. $[-2,0)$

C. $(0,2]$　　D. $[2,+\infty)$

8. [2019・全国卷Ⅱ] 设 $f(x)$为奇函数，且当$x\geqslant 0$ 时，$f(x)=e^x-1$，则当 $x<0$ 时，$f(x)=$ (　　)

A. $e^{-x}-1$　　B. $e^{-x}+1$

C. $-e^{-x}-1$　　D. $-e^{-x}+1$

9. [2024・新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-a, x<0,\\ e^x+\ln(x+1), x\geqslant 0\end{cases}$ 在 **R** 上单调递增，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,0]$　　B. $[-1,0]$

C. $[-1,1]$　　D. $[0,+\infty)$

10. [2020・全国卷Ⅰ] 若 $2^a+\log_2 a=4^b+2\log_4 b$，则 (　　)

A. $a>2b$　　B. $a<2b$

C. $a>b^2$　　D. $a<b^2$

11. [2021・新高考全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=x^3(a\cdot 2^x-2^{-x})$是偶函数，则 $a=$________.

12. [2022・北京卷] 设函数 $f(x)=\begin{cases}-ax+1, x<a,\\ (x-2)^2, x\geqslant a.\end{cases}$ 若 $f(x)$存在最小值，则 a 的一个取值为________；a 的最大值为________.

13. [2019・全国卷Ⅱ] 已知 $f(x)$是奇函数，且当 $x<0$ 时，$f(x)=-e^{ax}$. 若 $f(\ln 2)=8$，则 $a=$________.

14. [2023・全国甲卷] 若 $f(x)=(x-1)^2+ax+\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$为偶函数，则 $a=$________.

15. [2018・全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)+1$，$f(a)=4$，则 $f(-a)=$________.

考向2　函数性质的综合应用

16. [2025・全国一卷] 已知 $f(x)$为定义在 **R** 上周期为 2 的偶函数，当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时，$f(x)=5-2x$，则 $f\left(-\dfrac{3}{4}\right)=$ (　　)

A. $-\dfrac{1}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{4}$

C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{1}{2}$

17. [2023·全国甲卷]已知函数 $f(x)=e^{-(x-1)^2}$，记 $a=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$b=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，$c=f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，则（　）

A. $b>c>a$　　B. $b>a>c$

C. $c>b>a$　　D. $c>a>b$

18. [2017·全国卷Ⅰ]函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递减，且为奇函数. 若 $f(1)=-1$，则满足 $-1\leqslant f(x-2)\leqslant 1$ 的 x 的取值范围是（　）

A. $[-2,2]$　　B. $[-1,1]$

C. $[0,4]$　　D. $[1,3]$

19. [2017·全国卷Ⅰ]已知函数 $f(x)=\ln x+\ln(2-x)$，则（　）

A. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增

B. $f(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递减

C. $y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=1$ 对称

D. $y=f(x)$ 的图像关于点 $(1,0)$ 对称

20. [2021·新高考全国Ⅱ卷]已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+2)$ 是偶函数，$f(2x+1)$ 是奇函数，则（　）

A. $f\left(-\frac{1}{2}\right)=0$　　B. $f(-1)=0$

C. $f(2)=0$　　D. $f(4)=0$

21. [2020·全国新高考Ⅰ卷]若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是（　）

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$

B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

D. $[-1,0]\cup[1,3]$

22. [2022·全国乙卷]已知函数 $f(x)$，$g(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，且 $f(x)+g(2-x)=5$，$g(x)-f(x-4)=7$，若 $y=g(x)$ 的图像关于直线 $x=2$ 对称，$g(2)=4$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　）

A. -21　　B. -22

C. -23　　D. -24

23. [2022·新高考全国Ⅱ卷]若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，且 $f(x+y)+f(x-y)=f(x)f(y)$，$f(1)=1$，则 $\sum_{k=1}^{22}f(k)=$（　）

A. -3　　B. -2

C. 0　　D. 1

24. （多选题）[2023·新课标Ⅰ卷]已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，$f(xy)=y^2f(x)+x^2f(y)$，则（　）

A. $f(0)=0$

B. $f(1)=0$

C. $f(x)$ 是偶函数

D. $x=0$ 为 $f(x)$ 的极小值点

25. （多选题）[2025·全国二卷]已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且当 $x>0$ 时，$f(x)=(x^2-3)e^x+2$，则（　）

A. $f(0)=0$

B. 当 $x<0$ 时，$f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$

C. $f(x)\geqslant 2$，当且仅当 $x\geqslant\sqrt{3}$

D. $x=-1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

26. （多选题）[2022·新高考全国Ⅰ卷]已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$ 的定义域均为 $\mathbf{R}$，记 $g(x)=f'(x)$. 若 $f\left(\frac{3}{2}-2x\right)$，$g(2+x)$ 均为偶函数，则（　）

A. $f(0)=0$

B. $g\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

C. $f(-1)=f(4)$

D. $g(-1)=g(2)$

27. [2025·北京卷]关于定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)$，以下说法正确的有________.

①存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递增的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

②存在在 $\mathbf{R}$ 上单调递减的函数 $f(x)$ 使得 $f(x)+f(2x)=-x$ 恒成立；

③使得 $f(x)+f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个；

④使得 $f(x)-f(-x)=\cos x$ 恒成立的函数 $f(x)$ 存在且有无穷多个.

考点 6　幂函数、指数函数、对数函数

考向 1　指、对数的运算

1. [2020·全国卷Ⅰ] 设 $a\log_3 4=2$，则 $4^{-a}=$　(　　)

A. $\frac{1}{16}$　　B. $\frac{1}{9}$

C. $\frac{1}{8}$　　D. $\frac{1}{6}$

2. [2022·浙江卷] 已知 $2^a=5$，$\log_8 3=b$，则 $4^{a-3b}=$　(　　)

A. 25　　B. 5

C. $\frac{25}{9}$　　D. $\frac{5}{3}$

3. [2021·天津卷] 若 $2^a=5^b=10$，则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=$　(　　)

A. -1　　B. $\lg 7$

C. 1　　D. $\log_7 10$

4. [2022·天津卷] 化简 $(2\log_4 3+\log_8 3)(\log_3 2+\log_9 2)$ 的值为　(　　)

A. 1　　B. 2

C. 4　　D. 6

5. [2024·北京卷] 生物丰富度指数 $d=\frac{S-1}{\ln N}$ 是河流水质的一个评价指标，其中 S，N 分别表示河流中的生物种类数与生物个体总数. 生物丰富度指数 d 越大，水质越好. 如果某河流治理前后的生物种类数 S 没有变化，生物个体总数由 N_1 变为 N_2，生物丰富度指数由 2.1 提高到 3.15，则　(　　)

A. $3N_2=2N_1$　　B. $2N_2=3N_1$

C. $N_2^2=N_1^3$　　D. $N_2^3=N_1^2$

6. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\log_2(x^2+a)$，若 $f(3)=1$，则 $a=$________.

7. [2024·全国甲卷] 已知 $a>1$ 且 $\frac{1}{\log_8 a}-\frac{1}{\log_a 4}=-\frac{5}{2}$，则 $a=$________.

考向 2　基本初等函数的图象与性质

8. [2025·北京卷] 为得到函数 $y=9^x$ 的图象，只需把函数 $y=3^x$ 的图象上的所有点　(　　)

A. 横坐标变成原来的 $\frac{1}{2}$，纵坐标不变

B. 横坐标变成原来的 2 倍，纵坐标不变

C. 纵坐标变成原来的 $\frac{1}{3}$，横坐标不变

D. 纵坐标变成原来的 3 倍，横坐标不变

9. [2019·全国卷Ⅱ] 若 $a>b$，则　(　　)

A. $\ln(a-b)>0$　　B. $3^a<3^b$

C. $a^3-b^3>0$　　D. $|a|>|b|$

10. [2024·天津卷] 若 $a=4.2^{-0.3}$，$b=4.2^{0.3}$，$c=\log_{4.2}0.2$，则 a，b，c 的大小关系为　(　　)

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $c>a>b$　　D. $b>c>a$

11. [2025·上海卷] 设 $a>0$，$s\in\mathbf{R}$. 下列各项中，能推出 $a^s>a$ 的一项是　(　　)

A. $a>1$，且 $s>0$　　B. $a>1$，且 $s<0$

C. $0<a<1$，且 $s>0$　　D. $0<a<1$，且 $s<0$

12. [2020·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$，则 $f(x)$　(　　)

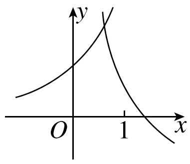
A. 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

B. 是奇函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

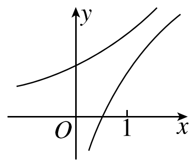
C. 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递增

D. 是偶函数，且在 $(0,+\infty)$ 单调递减

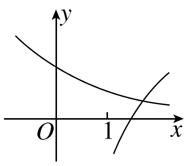
13. [2019·浙江卷]在同一直角坐标系中,函数 $y=\frac{1}{a^x}$,$y=\log_a\left(x+\frac{1}{2}\right)$($a>0$,且 $a\neq1$)的图像可能是 ( )



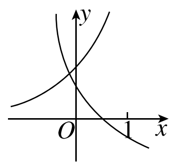
A



B



C



D

14. [2021·新高考全国Ⅱ卷]已知 $a=\log_5 2$,$b=\log_8 3$,$c=\frac{1}{2}$,则下列判断正确的是 ( )

A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$

C. $b>c>a$　　D. $c>b>a$

15. [2020·北京卷]已知函数 $f(x)=2^x-x-1$,则不等式 $f(x)>0$ 的解集是 ( )

A. $(-1,1)$

B. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C. $(0,1)$

D. $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$

16. [2024·北京卷]已知 (x_1,y_1),(x_2,y_2) 是函数 $y=2^x$ 的图象上两个不同的点,则 ( )

A. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<\frac{x_1+x_2}{2}$

B. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>\frac{x_1+x_2}{2}$

C. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}<x_1+x_2$

D. $\log_2\frac{y_1+y_2}{2}>x_1+x_2$

17. [2021·天津卷]设 $a=\log_2 0.3$,$b=\log_{\frac{1}{2}}0.4$,$c=0.4^{0.3}$,则 a,b,c 的大小关系为 ( )

A. $a<b<c$　　B. $c<a<b$

C. $b<c<a$　　D. $a<c<b$

18. [2025·全国一卷]已知 $2+\log_2 x=3+\log_3 y=5+\log_5 z$,则 x,y,z 的大小关系不可能是 ( )

A. $x>y>z$　　B. $x>z>y$

C. $y>x>z$　　D. $y>z>x$

19. [2017·全国卷Ⅰ]设 x,y,z 为正数,且 $2^x=3^y=5^z$,则 ( )

A. $2x<3y<5z$　　B. $5z<2x<3y$

C. $3y<5z<2x$　　D. $3y<2x<5z$

20. [2020·全国卷Ⅲ]已知 $5^5<8^4$,$13^4<8^5$.设 $a=\log_5 3$,$b=\log_8 5$,$c=\log_{13} 8$,则 ( )

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$

C. $b<c<a$　　D. $c<a<b$

21. [2020·全国卷Ⅱ]若 $2^x-2^y<3^{-x}-3^{-y}$,则 ( )

A. $\ln(y-x+1)>0$

B. $\ln(y-x+1)<0$

C. $\ln|x-y|>0$

D. $\ln|x-y|<0$

22. [2021·新高考全国Ⅱ卷]写出一个同时具有下列性质①②③的函数 $f(x)$:________.

① $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$;

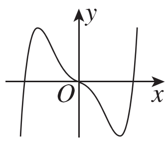
②当 $x\in(0,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$;

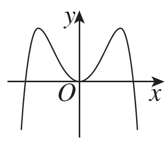
③ $f'(x)$ 是奇函数.

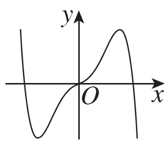
考点7　函数的图象、函数的零点及应用

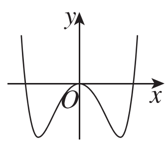
角度1　函数图象的判断

1. [2024·全国甲卷] 函数 $f(x)=-x^2+(e^x-e^{-x})\sin x$ 在区间[$-2.8,2.8$]的图象大致为　　(　　)

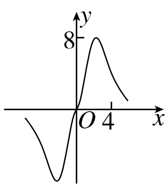

A

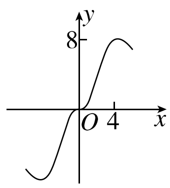

B

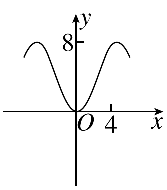

C

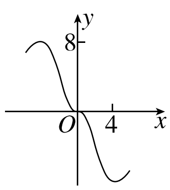

D

2. [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $y=\dfrac{2x^3}{2^x+2^{-x}}$ 在[$-6,6$]的图像大致为　　(　　)

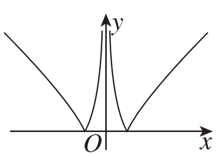

A

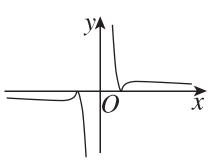

B

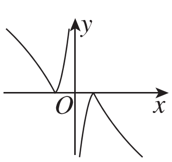

C

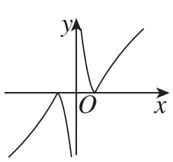

D

3. [2022·天津卷] 函数 $f(x)=\dfrac{|x^2-1|}{x}$ 的图像为　　(　　)

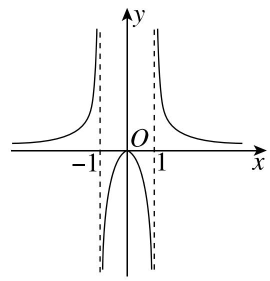

A


B


C


D

4. [2025·天津卷] 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图，则 $f(x)$ 的解析式可能为　　(　　)



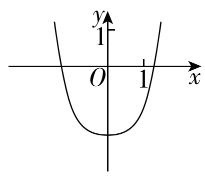
A. $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$

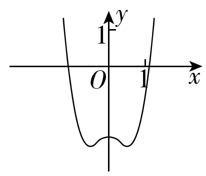
B. $f(x)=\dfrac{x}{|x|-1}$

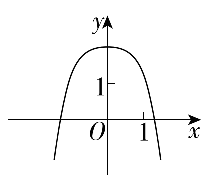
C. $f(x)=\dfrac{|x|}{1-x^2}$

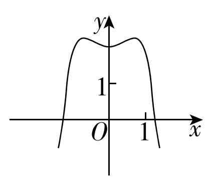
D. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

5. [2018·全国卷Ⅲ] 函数 $y=-x^4+x^2+2$ 的图像大致为　　(　　)

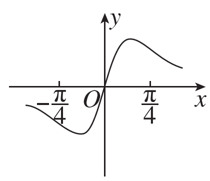

A


B


C


D

6. [2021·浙江卷] 已知函数 $f(x)=x^2+\dfrac{1}{4}$，$g(x)=\sin x$，则图像为下图的函数可能是　　(　　)



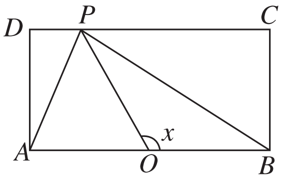
A. $y=f(x)+g(x)-\dfrac{1}{4}$

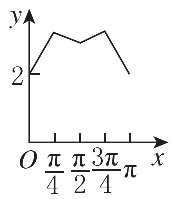
B. $y=f(x)-g(x)-\dfrac{1}{4}$

C. $y=f(x)g(x)$

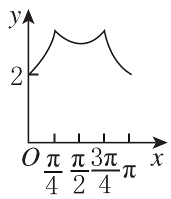
D. $y=\dfrac{g(x)}{f(x)}$

7. [2015·全国卷Ⅱ] 如图，长方形 $ABCD$ 的边 $AB=2$，$BC=1$，O 是 AB 的中点，点 P 沿着边 BC，CD 与 DA 运动，记 $\angle BOP=x$. 将动点 P 到 A，B 两点距离之和表示为 x 的函数 $f(x)$，则 $y=f(x)$ 的图像大致为 ( )

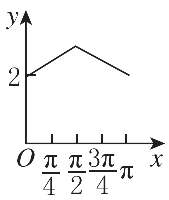




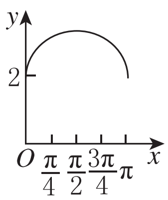
A



B



C



D

角度 2 函数的零点

8. [2025·天津卷] 函数 $f(x)=0.3^x-\sqrt{x}$ 的零点所在区间可以是 ( )

A. $(0,0.3)$　　B. $(0.3,0.5)$

C. $(0.5,1)$　　D. $(1,2)$

9. [2019·全国卷Ⅲ] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为 ( )

A. 2　　B. 3

C. 4　　D. 5

10. [2018·全国卷Ⅰ] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x, x\leqslant 0, \\ \ln x, x>0, \end{cases}$ $g(x)=f(x)+x+a$. 若 $g(x)$ 存在 2 个零点，则 a 的取值范围是 ( )

A. $[-1,0)$　　B. $[0,+\infty)$

C. $[-1,+\infty)$　　D. $[1,+\infty)$

11. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$，$g(x)=\cos x+2ax$（a 为常数），当 $x\in(-1,1)$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点，则 $a=$ ( )

A. -1　　B. $\frac{1}{2}$

C. 1　　D. 2

12. [2017·全国卷Ⅲ] 已知函数 $f(x)=x^2-2x+a(e^{x-1}+e^{-x+1})$ 有唯一零点，则 $a=$ ( )

A. $-\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

13. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=(x+a)\ln(x+b)$，若 $f(x)\geqslant 0$，则 a^2+b^2 的最小值为 ( )

A. $\frac{1}{8}$　　B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

14. [2019·全国卷Ⅱ] 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，满足 $f(x+1)=2f(x)$，且当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=x(x-1)$. 若对任意 $x\in(-\infty,m]$，都有 $f(x)\geqslant -\frac{8}{9}$，则 m 的取值范围是 ( )

A. $\left(-\infty,\frac{9}{4}\right]$　　B. $\left(-\infty,\frac{7}{3}\right]$

C. $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{8}{3}\right]$

15. [2020·浙江卷] 已知 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $ab\neq 0$，对于任意 $x\geqslant 0$ 均有 $(x-a)(x-b)(x-2a-b)\geqslant 0$，则 ( )

A. $a<0$　　B. $a>0$

C. $b<0$　　D. $b>0$

16. [2021·北京卷] 已知函数 $f(x)=|\lg x|-kx-2$，给出下列四个结论：

①若 $k=0$，则 $f(x)$ 恰有 2 个零点；

②存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点；

③存在负数 k，使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点；

④存在正数 k，使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是________.

17. [2024·天津卷] 若函数 $f(x)=2\sqrt{x^2-ax}-|ax-2|+1$ 有唯一零点，则 a 的取值范围为________.

18. [2022·天津卷] 设 $a\in\mathbf{R}$，对于任意实数 x，记 $f(x)=\min\{|x|-2, x^2-ax+3a-5\}$，若 $f(x)$ 至少有 3 个零点，则实数 a 的取值范围为________.

考点 8　函数与数学模型

1. [2020·全国卷Ⅲ] Logistic 模型是常用数学模型之一,可应用于流行病学领域. 有学者根据公布数据建立了某地区新冠肺炎累计确诊病例数 $I(t)$(t 的单位:天)的 Logistic 模型:$I(t)=\dfrac{K}{1+e^{-0.23(t-53)}}$,其中 K 为最大确诊病例数. 当 $I(t^*)=0.95K$ 时,标志着已初步遏制疫情,则 t^* 约为($\ln 19\approx 3$)　(　　)

A. 60　　B. 63

C. 66　　D. 69

2. [2021·全国甲卷] 青少年视力是社会普遍关注的问题,视力情况可借助视力表测量. 通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据,五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L=5+\lg V$. 已知某同学视力的五分记录法的数据为 4.9,则其视力的小数记录法的数据约为($\sqrt[10]{10}\approx 1.259$)　(　　)

A. 1.5　　B. 1.2

C. 0.8　　D. 0.6

3. [2025·北京卷] 在一定条件下,某人工智能语言模型训练 N 个单位的数据量所需要时间 $T=k\log_2 N$(单位:小时),其中 k 为常数,在此条件下,已知训练数据量 N 从 10^6 个单位增加到 1.024×10^9 个单位时,训练时间增加 20 小时,则当训练数据量 N 从 1.024×10^9 个单位增加到 4.096×10^9 个单位时,训练时间增加(单位:小时)　(　　)

A. 2　　B. 4

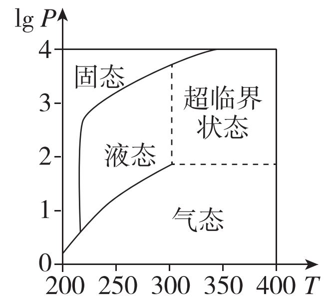
C. 20　　D. 40

4. [2020·全国新高考Ⅰ卷] 基本再生数 R_0 与世代间隔 T 是新冠肺炎的流行病学基本参数. 基本再生数指一个感染者传染的平均人数,世代间隔指相邻两代间传染所需的平均时间. 在新冠肺炎疫情初始阶段,可以用指数模型:$I(t)=e^{rt}$ 描述累计感染病例数 $I(t)$ 随时间 t(单位:天)的变化规律,指数增长率 r 与 R_0,T 近似满足 $R_0=1+rT$. 有学者基于已有数据估计出 $R_0=3.28$,$T=6$. 据此,在新冠肺炎疫情初始阶段,累计感染病例数增加 1 倍需要的时间约为($\ln 2\approx 0.69$)　(　　)

A. 1.2 天　　B. 1.8 天

C. 2.5 天　　D. 3.5 天

5. [2022·北京卷] 在北京冬奥会上,国家速滑馆"冰丝带"使用高效环保的二氧化碳跨临界直冷制冰技术,为实现绿色冬奥作出了贡献. 如图描述了一定条件下二氧化碳所处的状态与 T 和 $\lg P$ 的关系,其中 T 表示温度,单位是 K;P 表示压强,单位是 bar. 下列结论中正确的是(　　)



A. 当 $T=220$,$P=1026$ 时,二氧化碳处于液态

B. 当 $T=270$,$P=128$ 时,二氧化碳处于气态

C. 当 $T=300$,$P=9987$ 时,二氧化碳处于超临界状态

D. 当 $T=360$,$P=729$ 时,二氧化碳处于超临界状态

6. (多选题)[2023·新课标Ⅰ卷] 噪声污染问题越来越受到重视. 用声压级来度量声音的强弱,定义声压级 $L_p=20\times\lg\dfrac{p}{p_0}$,其中常数 p_0($p_0>0$)是听觉下限阈值,p 是实际声压. 下表为不同声源的声压级:

声源	与声源的距离/m	声压级/dB
燃油汽车	10	60～90
混合动力汽车	10	50～60
电动汽车	10	40

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车 10 m 处测得实际声压分别为 p_1,p_2,p_3,则　(　　)

A. $p_1\geqslant p_2$　　B. $p_2>10p_3$

C. $p_3=100p_0$　　D. $p_1\leqslant 100p_2$

考点9　导数的概念及其几何意义

1. [2020·全国卷Ⅰ] 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图像在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 (　　)

A. $y=-2x-1$　　B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$　　D. $y=2x+1$

2. [2023·全国甲卷] 曲线 $y=\frac{e^x}{x+1}$ 在点 $\left(1,\frac{e}{2}\right)$ 处的切线方程为 (　　)

A. $y=\frac{e}{4}x$　　B. $y=\frac{e}{2}x$

C. $y=\frac{e}{4}x+\frac{e}{4}$　　D. $y=\frac{e}{2}x+\frac{3e}{4}$

3. [2019·全国卷Ⅲ] 已知曲线 $y=ae^x+x\ln x$ 在点 $(1,ae)$ 处的切线方程为 $y=2x+b$，则 (　　)

A. $a=e,b=-1$

B. $a=e,b=1$

C. $a=e^{-1},b=1$

D. $a=e^{-1},b=-1$

4. [2021·新高考全国Ⅰ卷] 若过点 (a,b) 可以作曲线 $y=e^x$ 的两条切线，则 (　　)

A. $e^b<a$　　B. $e^a<b$

C. $0<a<e^b$　　D. $0<b<e^a$

5. [2024·全国甲卷] 设函数 $f(x)=\frac{e^x+2\sin x}{1+x^2}$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 (　　)

A. $\frac{1}{6}$　　B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. [2021·全国甲卷] 曲线 $y=\frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1,-3)$ 处的切线方程为________.

7. [2025·全国一卷] 若直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的切线，则 $a=$________.

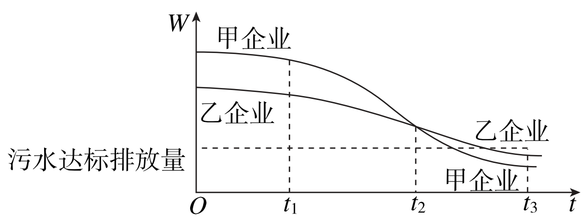
8. [2020·全国卷Ⅰ] 曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为2，则该切线的方程为________.

9. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 若曲线 $y=(x+a)e^x$ 有两条过坐标原点的切线，则 a 的取值范围是________.

10. [2022·新高考全国Ⅱ卷] 曲线 $y=\ln|x|$ 经过坐标原点的两条切线方程分别为________，________.

11. [2024·新课标Ⅰ卷] 若曲线 $y=e^x+x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线也是曲线 $y=\ln(x+1)+a$ 的切线，则 $a=$________.

12. [2020·北京卷] 为满足人民对美好生活的向往，环保部门要求相关企业加强污水治理，排放未达标的企业要限期整改. 设企业的污水排放量 W 与时间 t 的关系为 $W=f(t)$，用 $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的大小评价在 $[a,b]$ 这段时间内企业污水治理能力的强弱. 已知整改期内，甲、乙两企业的污水排放量与时间的关系如图所示.



给出下列四个结论：

①在 $[t_1,t_2]$ 这段时间内，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

②在 t_2 时刻，甲企业的污水治理能力比乙企业强；

③在 t_3 时刻，甲、乙两企业的污水排放量都已达标；

④甲企业在 $[0,t_1]$，$[t_1,t_2]$，$[t_2,t_3]$ 这三段时间中，在 $[0,t_1]$ 的污水治理能力最强.

其中所有正确结论的序号是________.

考点 10　导数的应用

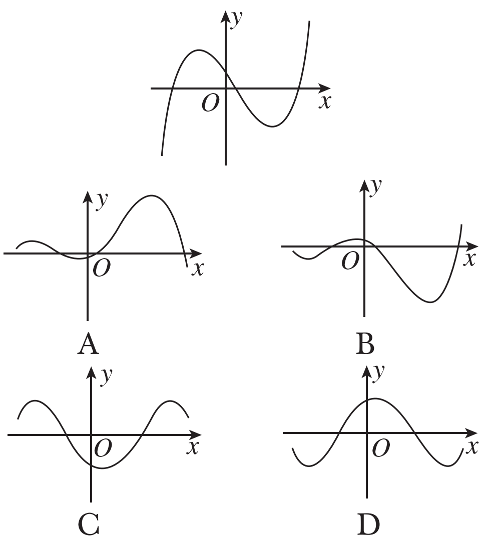
考向 1　函数的单调性与导数

1. [2016·全国卷Ⅰ] 若函数 $f(x)=x-\frac{1}{3}\sin 2x+a\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $[-1,1]$　　B. $\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

C. $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$　　D. $\left[-1,-\frac{1}{3}\right]$

2. [2017·浙江卷] 函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如图所示，则函数 $y=f(x)$ 的图像可能是 (　　)



3. [2023·新课标Ⅱ卷] 已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 单调递增，则 a 的最小值为 (　　)

A. e^2　　B. e

C. e^{-1}　　D. e^{-2}

4. [2017·山东卷] 若函数 $e^x f(x)$ ($e=2.718\ 28\cdots$ 是自然对数的底数) 在 $f(x)$ 的定义域上单调递增，则称函数 $f(x)$ 具有 M 性质. 下列函数中具有 M 性质的是 (　　)

A. $f(x)=2^{-x}$

B. $f(x)=x^2$

C. $f(x)=3^{-x}$

D. $f(x)=\cos x$

5. [2015·全国卷Ⅱ] 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 的导函数，$f(-1)=0$，当 $x>0$ 时，$xf'(x)-f(x)<0$，则使得 $f(x)>0$ 成立的 x 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

B. $(-1,0)\cup(1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$

D. $(0,1)\cup(1,+\infty)$

6. [2019·北京卷] 设函数 $f(x)=e^x+ae^{-x}$ (a 为常数). 若 $f(x)$ 为奇函数，则 $a=$________；若 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的增函数，则 a 的取值范围是________.

7. [2024·全国甲卷] 曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同的交点，则 a 的取值范围为________.

8. [2023·全国乙卷] 设 $a\in(0,1)$，若函数 $f(x)=a^x+(1+a)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是________.

考向 2　函数的极值与最值

9. [2022·全国甲卷] 当 $x=1$ 时，函数 $f(x)=a\ln x+\frac{b}{x}$ 取得最大值 -2，则 $f'(2)=$ (　　)

A. -1　　B. $-\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}$　　D. 1

10. [2023·全国乙卷] 函数 $f(x)=x^3+ax+2$ 存在 3 个零点，则 a 的取值范围是 (　　)

A. $(-\infty,-2)$　　B. $(-\infty,-3)$

C. $(-4,-1)$　　D. $(-3,0)$

11. [2021·全国乙卷] 设 $a\neq0$，若 $x=a$ 为函数 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 的极大值点，则 (　　)

A. $a<b$　　B. $a>b$

C. $ab<a^2$　　D. $ab>a^2$

12. [2017·全国卷Ⅱ]若 $x=-2$ 是函数 $f(x)=(x^2+ax-1)e^{x-1}$ 的极值点，则 $f(x)$ 的极小值为 ( )

A. -1 B. $-2e^{-3}$

C. $5e^{-3}$ D. 1

13. (多选题)[2022·新高考全国Ⅰ卷]已知函数 $f(x)=x^3-x+1$，则 ( )

A. $f(x)$有两个极值点

B. $f(x)$有三个零点

C. 点(0,1)是曲线 $y=f(x)$的对称中心

D. 直线 $y=2x$ 是曲线 $y=f(x)$的切线

14. (多选题)[2024·新课标Ⅰ卷]设函数 $f(x)=(x-1)^2(x-4)$，则 ( )

A. $x=3$ 是 $f(x)$的极小值点

B. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)<f(x^2)$

C. 当 $1<x<2$ 时，$-4<f(2x-1)<0$

D. 当 $-1<x<0$ 时，$f(2-x)>f(x)$

15. (多选题)[2024·新课标Ⅱ卷]设函数 $f(x)=2x^3-3ax^2+1$，则 ( )

A. 当 $a>1$ 时，$f(x)$有三个零点

B. 当 $a<0$ 时，$x=0$ 是 $f(x)$的极大值点

C. 存在 a,b，使得 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$的对称轴

D. 存在 a，使得点$(1,f(1))$为曲线 $y=f(x)$的对称中心

16. [2025·全国二卷]若 $x=2$ 是函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-a)$的极值点，则 $f(0)=$________.

17. [2021·新高考全国Ⅰ卷]函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为________.

18. [2018·全国卷Ⅰ]已知函数 $f(x)=2\sin x+\sin 2x$，则 $f(x)$的最小值是________.

考向3 导数的综合问题

19. [2022·全国乙卷]函数 $f(x)=\cos x+(x+1)\sin x+1$ 在区间$[0,2\pi]$的最小值、最大值分别为 ( )

A. $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}$ B. $-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}$

C. $-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$ D. $-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2}+2$

20. [2021·全国乙卷]设 $a=2\ln 1.01$，$b=\ln 1.02$，$c=\sqrt{1.04}-1$，则 ( )

A. $a<b<c$ B. $b<c<a$

C. $b<a<c$ D. $c<a<b$

21. [2022·全国甲卷]已知 $a=\frac{31}{32}$，$b=\cos\frac{1}{4}$，$c=4\sin\frac{1}{4}$，则 ( )

A. $c>b>a$ B. $b>a>c$

C. $a>b>c$ D. $a>c>b$

22. [2021·新高考全国Ⅱ卷]已知函数 $f(x)=|e^x-1|$，$x_1<0$，$x_2>0$，函数 $f(x)$的图像在点 $A(x_1,f(x_1))$和点 $B(x_2,f(x_2))$处的两条切线互相垂直，且分别与 y 轴交于 M,N 两点，则 $\frac{|AM|}{|BN|}$的取值范围是________.

23. [2022·全国乙卷]已知 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2(a>0$ 且 $a\neq1)$的极小值点和极大值点. 若 $x_1<x_2$，则 a 的取值范围是________.

题型 1　导数解答题专练

1. ［2023·新课标Ⅰ卷］已知函数 $f(x)=a(e^x+a)-x$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性；

(2)证明：当 $a>0$ 时，$f(x)>2\ln a+\frac{3}{2}$.

2. ［2023·北京卷］设函数 $f(x)=x-x^3e^{ax+b}$，曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=-x+1$.

(1)求 a,b 的值；

(2)设函数 $g(x)=f'(x)$，求 $g(x)$的单调区间；

(3)求 $f(x)$极值点的个数.

3. ［2022·全国乙卷］已知函数 $f(x)=\ln(1+x)+axe^{-x}$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若 $f(x)$在区间$(-1,0)$，$(0,+\infty)$各恰有一个零点，求 a 的取值范围.

4. ［2024·新课标Ⅱ卷］已知函数 $f(x)=e^x-ax-a^3$.

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；

(2)若 $f(x)$有极小值，且极小值小于 0，求 a 的取值范围.

5. [2025·北京卷] 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，$f(0)=0$，$f'(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$，直线 l_1 为曲线 $y=f(x)$ 在 $A(a,f(a))(a\neq0)$ 处的切线.

(1)求导函数 $f'(x)$ 的最大值；

(2)当 $-1<a<0$ 时，求证：除切点 A 外，$y=f(x)$ 的图象在 l_1 上方；

(3)当 $a>0$ 时，直线 l_2 过 A 且与 l_1 垂直，l_1，l_2 与 x 轴交点的横坐标分别为 x_1，x_2，求 $\dfrac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$ 的取值范围.

6. [2023·新课标Ⅱ卷] (1)证明：当 $0<x<1$ 时，$x-x^2<\sin x<x$；

(2)已知函数 $f(x)=\cos ax-\ln(1-x^2)$，若 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极大值点，求 a 的取值范围.

7. [2024·新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3$.

(1)若 $b=0$，且 $f'(x)\geqslant0$，求 a 的最小值；

(2)证明：曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形；

(3)当 $1<x<2$ 时，$f(x)$ 的取值范围是 $(-2,+\infty)$，求 b 的取值范围.

8. [2022·新高考全国Ⅱ卷] 已知函数 $f(x)=xe^{ax}-e^x$.

(1)当 $a=1$ 时，讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2)当 $x>0$ 时，$f(x)<-1$，求实数 a 的取值范围；

(3)设 $n\in\mathbf{N}^*$，证明：$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}>\ln(n+1)$.

9. [2025·全国二卷] 已知函数 $f(x)=\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2-kx^3$，其中 $0<k<\frac{1}{3}$.

(1)证明：$f(x)$在区间$(0,+\infty)$上存在唯一的极值点和唯一的零点.

(2)设 x_1,x_2 分别为 $f(x)$在区间$(0,+\infty)$上的极值点和零点.

(i)设函数 $g(t)=f(x_1+t)-f(x_1-t)$，证明：$g(t)$在区间$(0,x_1)$上单调递减；

(ii)比较 $2x_1$ 与 x_2 的大小，并证明你的结论.

10. [2022·新高考全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=e^x-ax$ 和 $g(x)=ax-\ln x$ 有相同的最小值.

(1)求 a；

(2)证明：存在直线 $y=b$，其与两条曲线 $y=f(x)$和 $y=g(x)$共有三个不同的交点，并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列.

11. [2022·全国甲卷] 已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x}-\ln x+x-a$.

(1)若 $f(x)\geqslant 0$，求 a 的取值范围；

(2)证明：若 $f(x)$有两个零点 x_1,x_2，则 $x_1x_2<1$.

12. [2025 · 天津卷] 已知函数 $f(x)=ax-(\ln x)^2$.

(1)当 $a=1$ 时,求 $f(x)$的图象在点$(1,f(1))$处的切线方程.

(2)已知 $f(x)$有 3 个零点 x_1,x_2,x_3,且 $x_1<x_2<x_3$.

(i)求 a 的取值范围;

(ii)证明:$(\ln x_2-\ln x_1)\cdot\ln x_3<\dfrac{4e}{e-1}$.

13. [2021 · 新高考全国Ⅰ卷] 已知函数 $f(x)=x(1-\ln x)$.

(1)讨论 $f(x)$的单调性;

(2)设 a,b 为两个不相等的正数,且 $b\ln a-a\ln b=a-b$,证明:$2<\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}<e$.

14. [2025 · 全国一卷] (1)求函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$ 在区间$\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$上的最大值;

(2)给定 $\theta\in(0,\pi)$和 $a\in\mathbf{R}$,证明:存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$,使得 $\cos y\leqslant\cos\theta$;

(3)设 $b\in\mathbf{R}$,若存在 $\varphi\in\mathbf{R}$,使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\leqslant b$ 对 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立,求 b 的最小值.